Функциональный анализ и его приложения
2015, т. 49, вып. 1, с. 62–70

УДК 517.312+512.772

Об алгебраических функциях, интегрируемых в конечном виде*

© 2015. А. Г. Хованский

Памяти Владимира Игоревича Арнольда

Теорема Лиувилля описывает алгебраические функции, интегрируемые в обобщенно элементарных функциях. На ней основаны алгоритмы, во многих случаях позволяющие или взять интеграл, или доказать, что он «не берется в конечном виде». Результаты статьи не улучшают этих алгоритмов, но позволяют понять, как расположены 1-формы, интегрируемые в конечном виде, среди всех 1-форм на алгебраической кривой.

1. Введение. Интеграл от рациональной функции f комплексного переменного z берется явно:

$$\int_{z_0}^{z} f(t)\,dt = f_0(z) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \lambda_i \ln f_i(z), \tag{1}$$

где f_i при $0 \leqslant i \leqslant k$ — рациональные функции, а λ_i — комплексные числа. Равенство (1) удобно записывать в виде

$$f\,dz = df_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}\,.$$

Когда интеграл от абелевой 1-формы α берется в конечном виде? Размышляя над этим вопросом, Абель заложил основы теории абелевых интегралов. Лиувилль продолжил его работу и нашел условия, при которых интеграл от формы α является *обобщенно элементарной функцией* (см. разд. 2).

Теорема Лиувилля. *Интеграл от рациональной формы α на алгебраической кривой Γ является обобщенно элементарной функцией, если и только если*

$$\alpha = df_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \tag{2}$$

где f_i при $0 \leqslant i \leqslant k$ — рациональные функции на Γ, а λ_i — комплексные числа.

Доказательство приведено, например, в книге [1]. Основанные на теореме Лиувилля алгоритмы во многих случаях позволяют либо доказать неэлементарность интеграла, либо его найти [2]. Лиувилль нашел целый ряд других результатов о разрешимости и неразрешимости уравнений в конечном виде. Позже его пионерские работы были обобщены и переведены на язык дифференциальной алгебры. Обширную библиографию по этому вопросу можно найти в обзоре [3].

*Работа выполнена при частичной поддержке Канадским грантом no. 0GP0156833.

Мы будем иметь дело не с алгебраическими обобщениями, а с классической комплексной ситуацией. Рациональные функции и 1-формы на комплексной алгебраической кривой можно рассматривать как мероморфные функции и 1-формы на компактной римановой поверхности. Мы будем пользоваться и той, и другой терминологиями.

В формуле (2) фигурируют два слагаемых: df_0 и $\sum \lambda_i d(f_i)/f_i$. Первое слагаемое, очевидно, содержится в подпространстве Ω_s пространства Ω мероморфных 1-форм на кривой Γ, состоящем из форм, все вычеты которых равны нулю.

Рассмотрим подпространство $\Omega_l \subset \Omega$, состоящее из форм α, имеющих полюсы не выше первого порядка, таких, что $\int_\Gamma \alpha \wedge \beta = 0$ для всякой гармонической 1-формы β. Оказывается, что Ω_l дополнительно к Ω_s (т. е. $\Omega = \Omega_l + \Omega_s$) и содержит логарифмические дифференциалы, т. е. второе слагаемое $\sum \lambda_i d(f_i)/f_i$ содержится в Ω_l. Это неожиданное простое наблюдение является основным результатом статьи. Насколько мне известно, оно новое, хотя теорема Лиувилля известна более полутора столетий и ей посвящены многочисленные исследования.

Рецензент настоящей статьи заметил, что Ω_l можно определить совершенно по-другому, как комплексификацию $\mathbb{R}$-линейного пространства $\Omega_\mathbb{R}$ всех 1-форм с вещественными периодами и полюсами не выше первого порядка (см. конец разд. 3). Это замечание проясняет ситуацию. К тому же оно связывает Ω_l с пространством $\Omega_\mathbb{R}$, которое встречается во многих работах (см. [4]–[7]). Я признателен рецензенту за его красивое замечание и за предложения редакционного характера.

Вопросом о разрешимости и о неразрешимости уравнений в конечном виде меня заинтересовал В. И. Арнольд. Я очень многим обязан Владимиру Игоревичу. С благодарностью посвящаю статью его памяти.

2. Обобщенно элементарные функции на римановой поверхности. Начнем с определения класса обобщенно элементарных функций комплексной переменной z. Этот класс определяется заданием множества *основных элементарных функций* и списка *допустимых операций*. Функция называется *обобщенно элементарной*, если ее можно получить из основных функций при помощи допустимых операций (это определение и ряд близких понятий подробно обсуждаются в книге [1]).

Поскольку речь идет о многозначных функциях, нужно уточнить, что мы имеем в виду. Многозначная аналитическая функция однозначно задается своим ростком (т. е. сходящимся рядом Тейлора) в любой точке и представляет собой совокупность всех ростков, получающихся при аналитическом продолжении этого ростка. Определим, например, суперпозицию многозначных функций. *Функция F представима в виде суперпозиции функций f и g*, если:

(i) существуют точка $a \in \mathbb{C}$ и ростки F_a и g_a функций F и g в точке a,

(ii) существует росток f_b функции f в точке $b = g_a(a)$,

(iii) выполняется равенство $F_a = f_b \circ g_a$.

Например, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ функция $F(z) = z + 2k\pi i$ представима в виде суперпозиции $F = \ln \exp(z)$. (Действительно, пусть $b = \exp a$ и $\ln_b$ — росток в точке b функции $\ln$, такой, что $\ln_b \circ \exp_a = z_a$. Каждый росток функции $\ln$ в точке b имеет вид $\ln_b + 2k\pi i$. Функция $z + 2k\pi i$ является аналитическим продолжением ростка $(\ln_b + 2k\pi i) \circ \exp_a$.) Другие операции над многозначными функциями определяются аналогично.

Список основных элементарных функций.

1. Комплексные константы и функция z.
2. $\exp z$, $\ln z$ и функции z^α при $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$.
4. $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$.

Список допустимых операций.

1. Арифметические операции $+$, $-$, $\times$, $:$.
2. Операция суперпозиции, сопоставляющая функциям f и g их композицию $f \circ g$.
3. Операция решения алгебраического уравнения, сопоставляющая функциям $f_1, \ldots, f_n$ функцию y, такую, что $y^n + f_1 y^{n-1} + \cdots + f_0 = 0$.

В сущности, в список основных элементарных функций входят функции, которые мы проходили в школе и которые часто вносят в клавиатуру калькуляторов. Для определения обобщенных элементарных функций было бы достаточно в этом списке оставить лишь комплексные константы и функции z, $\exp$ и $\ln$. Остальные функции из списка получаются из них применением допустимых операций (см. лемму 1.1 из гл. 1 в [1]).

Пусть Γ — компактная риманова поверхность, $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — непостоянное мероморфное отображение и f — (многозначная) функция на Γ. Скажем, что f — *обобщенно элементарная функция* на Γ, если $f(\pi^{-1})$ — обобщенно элементарная функция на $\mathbb{C}$. Покажем, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора отображения π.

Лемма 1. *Если $f(\pi^{-1})$ — обобщенно элементарная функция, то для всякого непостоянного мероморфного отображения $\pi_0\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ функция $f(\pi_0^{-1})$ тоже является обобщенно элементарной.*

Доказательство. Функция $u = \pi(\pi_0^{-1}(z))$ является алгебраической. По условию функция $g(u) = f(\pi^{-1}(u))$ обобщенно элементарна. Но $f(\pi_0^{-1})(z) = g(u(z))$. Лемма доказана.

3. Формы логарифмического типа. На комплексной прямой $\mathbb{C}$ функция r^{-1}, где $r(a)$ — расстояние от $a \in \mathbb{C}$ до нуля $0 \in \mathbb{C}$, интегрируема в окрестности точки 0. Поэтому мероморфная функция с полюсами не выше первого порядка в компактной области $K \subset \mathbb{C}$ является функцией класса L^1 в этой области K. Пусть Γ — компактная риманова поверхность, снабженная некоторой римановой метрикой, совместной с комплексной структурой. Мероморфная 1-форма α на Γ с полюсами не выше первого порядка принадлежит, как видно из сказанного выше, к классу L^1. Пусть конечное множество $A \subset \Gamma$ содержит полюсы формы α. Форма α замкнута в области $\Gamma \setminus A$, но на кривой Γ, с точки зрения теории потоков, справедливо равенство

$$d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum_{a \in A} \operatorname{Res} \alpha(a) \delta(a),$$

где $\delta(a)$ есть 2-поток, сопоставляющий всякой гладкой функции ϕ на Γ число $\phi(a)$. Для всякой гладкой 1-формы β на Γ определен интеграл $\int_\Gamma \alpha \wedge \beta$. Скажем, что 1-форма α является *логарифмическим дифференциалом*, если существует рациональная функция f, такая, что $\alpha = df/f$. Настоящая работа основана на следующем простом наблюдении.

Теорема 2. *Для всякого логарифмического дифференциала $\alpha = df/f$ и всякой гармонической формы β на кривой Γ справедливо тождество*

$$\int_\Gamma \alpha \wedge \beta = 0.$$

Доказательство. Гармоническая форма β раскладывается в сумму голоморфной формы ω_1 и антиголоморфной формы $\overline{\omega}_2$. Для голоморфной формы ω_1 справедливо тождество $\alpha \wedge \omega_1 \equiv 0$, поэтому $\int_\Gamma \alpha \wedge \omega_1 = 0$. Покажем, что $\int_\Gamma \alpha \wedge \overline{\omega}_2 = 0$. Рассмотрим разветвленное накрытие $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$, заданное функцией f, т. е. накрытие, для которого $f = z \circ \pi$, где $z\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ — координата на $\mathbb{C}^1$. Для всякой формы Φ на Γ будем обозначать через $\operatorname{Trace}\Phi$ след формы Φ при проекции π. Согласно теореме Абеля, $\operatorname{Trace}\omega_2 \equiv 0$, поэтому $\operatorname{Trace}\overline{\omega}_2 \equiv \overline{\operatorname{Trace}\omega_2} \equiv 0$. След $\operatorname{Trace}(\alpha \wedge \overline{\omega}_2)$ тоже равен нулю, так как

$$\operatorname{Trace}(\alpha \wedge \overline{\omega}_2) = \operatorname{Trace}\left(\frac{d(z\circ\pi)}{z\circ\pi} \wedge \overline{\omega}_2\right) = \frac{d(z\circ\pi)}{z\circ\pi} \wedge \operatorname{Trace}\overline{\omega}_2 \equiv 0.$$

Имеем $\int_\Gamma \alpha \wedge \overline{\omega}_2 = \int_{\mathbb{C}P^1} \operatorname{Trace}(\alpha \wedge \overline{\omega}_2) = 0$. Теорема доказана.

Будем говорить, что мероморфная 1-форма α на Γ имеет *логарифмический тип*, если: (1) все полюсы формы α просты; (2) для любой гармонической формы β интеграл $\int_\Gamma \alpha \wedge \beta$ равен нулю.

Обозначим через Ω_l пространство форм логарифмического типа и через $\Omega_{\ln}$ пространство форм, представимых в виде линейных комбинаций $\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \lambda_i df_i/f_i$ логарифмических дифференциалов.

Следствие 3. *Справедливо включение $\Omega_{\ln} \subset \Omega_l$.*

Теорема 4. *Пусть $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — функция, отличная от нуля лишь на конечном множестве, такая, что $\sum_{a\in\Gamma} \phi(a) = 0$. Тогда есть единственная форма $\alpha_\phi \in \Omega_l$, вычет $\operatorname{Res}\alpha_\phi(a)$ которой в каждой точке a равен $\phi(a)$.*

Доказательство. По теореме Римана–Роха существует форма α_1, имеющая лишь простые полюсы и такая, что $\operatorname{Res}\alpha_1 = \phi$, где $\operatorname{Res}\alpha_1\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ — функция, сопоставляющая точке $a \in \Gamma$ вычет формы α_1 в a. (Форма α_1 определена с точностью до прибавления голоморфной формы.) Рассмотрим функцию F_{α_1}, сопоставляющую всякой антиголоморфной форме $\overline{\omega}$ число $F_{\alpha_1}(\overline{\omega}) = \int_\Gamma \alpha_1 \wedge \omega$. Как и всякая линейная функция на пространстве антиголоморфных форм, функция F_{α_1} представима в виде $F_{\alpha_1}(\overline{\omega}) = \int_\Gamma \omega_1 \wedge \overline{\omega}$, где ω_1 — голоморфная форма, определенная этим условием однозначно. Осталось положить $\alpha_\phi = \alpha_1 - \omega_1$. Теорема доказана.

Следствие 5. *Размерность пространства $\Omega_l(A) \subset \Omega_l$, состоящего из форм, полюсы которых лежат в конечном множестве $A \subset \Gamma$, равна $\#A - 1$.*

Замечание. Следующее рассуждение рецензента связывает Ω_l с $\mathbb{R}$-линейным пространством $\Omega_\mathbb{R}$ форм с полюсами не выше первого порядка, все периоды которых вещественны. Если $\alpha \in \Omega_\mathbb{R}$ и ω — голоморфная форма, то интегралы $\int_\Gamma \alpha \wedge \omega$ и $\int_\Gamma \alpha \wedge \overline{\omega}$ являются комплексно-сопряженными числами (это вытекает из того, что интеграл формы α по любому циклу вещественен, а интегралы форм ω и $\overline{\omega}$ по всякой 1-цепи с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ сопряжены). Но $\int_\Gamma \alpha \wedge \omega = 0$, поэтому $\int_\Gamma \alpha \wedge \overline{\omega} = 0$. Следовательно, $\Omega_\mathbb{R} \subset \Omega_l$ и $\Omega_\mathbb{R} + i\Omega_\mathbb{R} \subset \Omega_l$. Любая функция ϕ (см. теорему 4) представима как вычет некоторой формы из $\Omega_{\mathbb{R}} + i\Omega_{\mathbb{R}}$; поэтому $\Omega_{\mathbb{R}} + i\Omega_{\mathbb{R}} = \Omega_l$. Очевидно, что $df/f \in i\Omega_{\mathbb{R}}$ для любой мероморфной функции f. Приведенное рассуждение содержит альтернативное доказательство результатов разд. 3. О пространстве $\Omega_{\mathbb{R}}$ и его разнообразных применениях можно прочитать в работах [4]–[7].

4. Формы второго рода и теорема о разложении. Мероморфная 1-форма называется *формой второго рода*, если ее вычет в каждой точке равен нулю (в нашей терминологии голоморфные формы являются формами второго рода).

Обозначим через Ω_d пространство точных форм, т. е. форм вида $\alpha = df$, где f — рациональная функция. Очевидно, что всякая *точная форма является формой второго рода*, т. е. что $\Omega_d \subset \Omega_s$.

Теорема 6 (о разложении). *Пространство Ω мероморфных 1-форм на Γ раскладывается в прямую сумму подпространств Ω_s и Ω_l.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Omega$. Положим $\phi = \operatorname{Res} \alpha$. Определим α_l и α_s равенствами $\alpha_l = \alpha_\phi$ (см. доказательство теоремы 4) и $\alpha_s = \alpha - \alpha_l$. Ясно, что $\alpha = \alpha_s + \alpha_l$, $\alpha_s \in \Omega_s$, $\alpha_l \in \Omega_l$. Пространства Ω_s и Ω_l не пересекаются. Теорема доказана.

Разложение форм из теоремы 6 согласуется с теоремой Лиувилля.

Теорема 7. *Пусть $\alpha = \alpha_s + \alpha_l$ — разложение формы α из теоремы* 6. *Первообразная формы α обобщенно элементарна, если и только если $\alpha_s \in \Omega_d$ — точная форма, а $\alpha_l \in \Omega_{\ln}$ — линейная комбинация логарифмических дифференциалов.*

Доказательство. Согласно теореме Лиувилля, первообразная формы α обобщенно элементарна, если и только если форма α представима в виде (2). При этом слагаемое df_0 лежит в $\Omega_d \subset \Omega_s$, а слагаемое $\sum \lambda_i df_i/f_i$ лежит в $\Omega_{\ln} \subset \Omega_l$ (см. следствие 3). Теорема доказана.

С теоремой Лиувилля связаны две следующие задачи.

Задача 1. Принадлежит ли заданная форма $\alpha \in \Omega_s$ подпространству Ω_d?

Задача 2. Принадлежит ли заданная форма $\alpha \in \Omega_l$ подпространству $\Omega_{\ln}$?

Задача 1 обсуждается в разд. 5, а задача 2 — в разд. 6.

5. Точные рациональные формы. Покажем, что коразмерность подпространства $\Omega_d \subset \Omega_s$ равна удвоенному роду g кривой Γ.

Теорема 8. *Пространство Ω_s/Ω_d изоморфно пространству $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ одномерных когомологий де Рама кривой Γ. В частности,* $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_s/\Omega_d = 2g$.

Доказательство. Всякая форма $\alpha_s \in \Omega_s$ задает класс одномерных когомологий де Рама кривой Γ. Действительно, если цикл γ ограничивает область на кривой Γ и не проходит через полюсы формы α_s, то $\int_\gamma \alpha_s = 0$, так как все вычеты формы α_s равны нулю. Чтобы закончить доказательство, достаточно воспользоваться приведенной ниже леммой 9.

Пусть $A \subset \Gamma$ — непустое конечное множество и $\Omega(A)$ — пространство рациональных форм, регулярных в $\Gamma \setminus A$. Обозначим через $\Omega_s(A)$ и $\Omega_d(A)$ пересечения $\Omega(A)$ с пространствами Ω_s и Ω_d.

Лемма 9. *Для всякого класса когомологий $h \in H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ найдется форма $\alpha \in \Omega_s(A)$, представляющая класс h.*

Доказательство. Кривая $X = \Gamma \setminus A$ имеет структуру одномерного гладкого аффинного алгебраического многообразия, в которой все мероморфные функции и 1-формы, полюсы которых лежат в A, являются регулярными функциями и 1-формами на X. По теореме де Рама–Гротендика всякий класс одномерных когомологий аффинной кривой X представим некоторой формой из $\Omega(A)$. Форма α, представляющая h, имеет нулевые вычеты и, следовательно, лежит в $\Omega_s(A)$.

Пусть $D = \sum_{a_i \in A} m_i a_i$ — дивизор, носитель которого равен A, а коэффициенты удовлетворяют неравенству $m_i \geqslant 2$, $\Omega_s[D]$ — пространство форм $\beta \in \Omega_s(A)$, для которых $(\beta) \leqslant D$, и $\Omega_d[D] = \Omega_s[D] \cap \Omega_d$. Вычислим коразмерность подпространства $\Omega_d[D] \subset \Omega_s[D]$, для которого задача 1 разрешима. Пусть:

D' — дивизор, определенный равенством $D' = D - \sum_{a_i \in A} a_i$;

$\mathscr{L}(D')$ — пространство функций, таких, что $D' + (f) \geqslant 0$;

$l(D') = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{L}(D')$;

$\mathscr{I}(D')$ — пространство форм β, таких, что $(\beta) \geqslant D'$;

$\mu(D') = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{I}(D')$.

Утверждение 10. *Коразмерность подпространства* $\Omega_d[D]$ *в* $\Omega_s[D]$ *равна* $2g - \mu(D')$.

Доказательство. По теореме Римана–Роха имеют место равенства

(i) $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_s[D] = (\deg D + g - 1) - (\#A - 1) = \deg D' + g$;

(ii) $l(D') = \deg D' - g + 1 + \mu(D')$.

Далее, размерность пространства дифференциалов функций из $\mathscr{L}(D')$ равна $l(D') - 1$ (дифференцирование переводит константы в нуль). Поэтому коразмерность подпространства $\Omega_d[D] \subset \Omega_s[D]$ равна $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_s[D] - (l(D') - 1) = 2g - \mu(D')$. Утверждение доказано.

Отметим, что если $\deg D' > 2g - 2$, то $\mu(D') = 0$ и утверждение 10 является уточнением теоремы 8.

Прокомментируем утверждение 10. Фиксируем около каждой точки $a \in A$ локальную координату z, такую, что $z(a) = 0$. Пусть около точки $a \in A$ форма $\alpha \in \Omega_s[D]$ представима в виде

$$\alpha = \left(\frac{c_k}{z^k} + \dots + \frac{c_2}{z^2} + \varphi\right) dz,$$

где φ — росток голоморфной функции в точке a. Росток

$$I_a = \frac{(-k+1)c_k}{z^{k-1}} + \dots + \frac{-c_2}{z}$$

представляет собой главную часть интеграла формы α около точки a: росток $\alpha - dI_a$ голоморфен около точки a.

Теорема 11 (о задаче 1). *Задача 1 для формы* $\alpha \in \Omega_s[D]$ *разрешима, если и только если для наборов* I_a *главных частей интеграла формы* α *и всякой голоморфной на* Γ *формы* ω *выполнено равенство* $\sum_{a \in A} \operatorname{Res}(I_a \omega) = 0$.

Доказательство. По теореме Римана–Роха мероморфная функция с набором главных частей I_a существует, если и только если для всякой голоморфной формы ω выполнено равенство $\sum_{a \in A} \operatorname{Res}(I_a \omega) = 0$.

Утверждение 10 вытекает из подсчета числа независимых условий, которые накладываются теоремой 11 на наборы главных частей I_a.

Замечание. Как явно найти функцию на заданной алгебраической кривой с заданными набором главных частей, если такая функция существует? Теорема 11 не слишком помогает ответить на этот вопрос. Разработаны эффективные методы нахождения такой функции (зависящие, конечно, от способа задания как кривой, так и главных частей функции) (см. [2]).

6. Логарифмические дифференциалы. Форму $\alpha \in \Omega_{ln}$ можно разными способами представить в виде

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \tag{3}$$

где f_i — рациональные функции на Γ. Пусть A — множество полюсов формы α. Следующее простое утверждение хорошо известно (см., например, [1]).

Утверждение 12. *Если представление* (3) *содержит минимальное число k слагаемых, то λ_i независимы над $\mathbb{Q}$ и носители дивизоров всех функций f_i содержатся в A.*

Введем несколько определений и обозначений. Пусть $A \subset \Gamma$ — конечное множество. Обозначим через $J_0(A)$ совокупность функций $\phi\colon A \to \mathbb{Z}$, таких, что дивизор $D_\phi = \sum \phi(a)a$ главный. Множество $J_0(A)$ является аддитивной группой. Комплексное линейное пространство функций на A, порожденное группой $J_0(A)$, будем обозначать через $\mathscr{D}(A)$. Размерность $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D}(A)$ будем называть *рангом* множества A и обозначать символом $r(A)$. Обозначим через $\Omega_{\mathrm{ln}}(A)$ и $\Omega_l(A)$ пересечения пространств Ω_{ln} и Ω_l с пространством $\Omega(A)$.

Теорема 13 (о задаче 2). *Форма $\alpha \in \Omega_l(A)$ лежит в $\Omega_{\mathrm{ln}}(A)$, если и только если функция $\operatorname{Res}\alpha\colon A \to \mathbb{C}$ лежит в $\mathscr{D}(A)$. Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathrm{ln}}(A) = r(A)$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Res}\alpha \in \mathscr{D}(A)$ и $\operatorname{Res}\alpha = \sum \lambda_i \operatorname{ord} f_i$, где f_i — рациональные функции, носители дивизоров (f_i) которых принадлежат A, а $\operatorname{ord} f_i$ — функция, сопоставляющая точке $a \in \Gamma$ порядок функции f_i в точке a. Тогда $\alpha = \sum \lambda_i df_i/f_i$. Обратно, если $\alpha \in \Omega_l(A)$ принадлежит пространству Ω_{ln}, то по лемме 9 $\alpha \in \Omega_{\mathrm{ln}}(A)$; поэтому $\operatorname{Res}\alpha \in \mathscr{D}(A)$.

Замечание. Как явно представить форму на алгебраической кривой в виде линейной комбинации логарифмических дифференциалов, если такое представление существует? Теорема 13 не слишком помогает ответить на этот вопрос. Разработаны методы, позволяющие во многих случаях находить такую линейную комбинацию (эти методы зависят, конечно, от способа задания как формы, так и кривой) (см. [2]).

7. Коразмерность форм, интегрируемых в конечном виде. Теоремы 8 и 13 содержат вычисление коразмерности пространства $\Omega_e(A) \subset \Omega(A)$ форм с заданным множеством A полюсов на Γ, имеющих обобщенно элементарную первообразную. Пространство $\Omega_e(\varnothing)$ содержит лишь форму $\alpha \equiv 0$. Ниже мы предполагаем, что $A \neq \varnothing$.

Следствие 14 (о коразмерностях). *Коразмерность подпространства*
(i) $\Omega_d(A)$ *в пространстве* $\Omega_s(A)$ *равна* $2g$, *где* g *— род кривой* Γ;
(ii) $\Omega_{\mathrm{ln}}(A)$ *в пространстве* $\Omega_l(A)$ *равна* $\#(A) - r(A) - 1$;
(iii) $\Omega_e(A)$ *в пространстве* $\Omega(A)$ *равна* $2g + \#(A) - r(A) - 1$.

Множество $A \subset \Gamma$, для которого $\#A = k$, можно рассматривать как точку в k-й симметрической степени $\Gamma^{(k)}$ кривой Γ. Пусть $\Sigma^{(k)} \subset \Gamma^{(k)}$ — совокупность множеств $A \subset \Gamma$, таких, что $\#A = k$ и $r(A) > 0$.

Утверждение 15. *Для кривой Γ положительного рода множество $\Sigma^{(k)}$ имеет меру нуль в $\Gamma^{(k)}$.*

Доказательство. Если $r(A) > 0$, то существует главный дивизор $D = \sum k_i a_i$, где $a_i \in A$, $\sum k_i = 0$. В этом случае точки множества A удовлетворяют нетривиальному соотношению $\sum k_i a_i = 0$ в якобиане кривой Γ. Отсюда вытекает утверждение 15.

Следствие 16. *На кривой Γ рода $g > 0$ для почти всякого непустого множества A коразмерность подпространства $\Omega_e(A)$ в $\Omega(A)$ равна $2g + \#A - 1 = \dim H^1(\Gamma \setminus A, \mathbb{C})$.*

Приведем примеры непустых множеств A на кривых как угодно большого рода, для которых достигается верхняя оценка числа $r(A)$, равная $\#A - 1$. Начнем со случая кривых рода один.

Пусть (Γ, a_0) — кривая рода один с отмеченной точкой a_0. Скажем, что точка $a \in \Gamma$ *имеет конечный порядок*, если для некоторого натурального k дивизор $ka - ka_0$ главный. Точки конечного порядка всюду плотны на Γ.

Пример 1. На кривой рода один для любого конечного непустого множества A точек конечного порядка выполнено равенство $r(A) = \#A - 1$.

Итак, на кривой рода 1 *первообразная всякой формы $\alpha \in \Omega_l(A)$, где A состоит из точек конечного порядка, является линейной комбинацией логарифмов рациональных функций на Γ. Коразмерность подпространства $\Omega_e(A)$ в $\Omega(A)$ равна* $\dim H^1(\Gamma, \mathbb{C}) = 2$.

Пусть R — рациональная функция степени k от комплексной переменной z, имеющая простые нули и полюсы. Для $m > 0$ рассмотрим алгебраическую функцию $y(z)$, определенную равенством $y^m = P(z)$, и риманову поверхность $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}P^1$ этой функции. По формуле Римана–Гурвица род поверхности Γ равен $(k-1)(m-1)+1$ и может быть сколь угодно большим.

Пример 2. Пусть Σ — множество нулей и полюсов функции R и $A = \pi^{-1}(\Sigma)$. Всякий дивизор степени нуль, носитель которого лежит в A, после умножения на m становится главным дивизором $(\pi^* f)$, где f — некоторая рациональная функции переменной z. Поэтому выполнено равенство $r(A) = \#A - 1$.

Итак, в условиях примера 2 *первообразная всякой формы $\alpha \in \Omega_l(A)$ является линейной комбинацией логарифмов рациональных функций на Γ, а коразмерность подпространства $\Omega_e(A)$ в $\Omega(A)$ равна* $\dim H^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Литература

[1] А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде*, МЦНМО, М., 2008.

[2] J. Davenport, *On the Integration of Algebraic Functions*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 102, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.

[3] M. F. Singer, *Formal solutions of differential equations*, J. Symbolic Comput., **10**:1 (1990), 59–94.

[4] S. Grushevsky, I. Krichever, *The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces*, in: Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces.

Surveys in Differential Geometry, vol. XIV, International Press, Somerville, MA, 2009, 111–129.

[5] I. Krichever, D. Zakharov, *A note on critical points of soliton equations*, Anal. Math. Phys., **1**:1 (2011), 15–35.

[6] S. Grushevsky, I. Krichever, *Foliations on the moduli space of curves, vanishing in cohomology, and Calogero–Moser curves*, `http://arxiv.org/abs/1108.4211`.

[7] И. М. Кричевер, *Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло*, Функц. анализ и его прил., **46**:2 (2012), 37–51.

Институт системного анализа РАН
Независимый московский университет
The University of Toronto, Canada
askold@math.toronto.edu

Поступила в редакцию
30 апреля 2013 г.